5.6 Düzgün Tekil Nokta Civarında Seri Çözümleri I

İkinci mertebeden genel lineer dif.

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \qquad (5.1)$$

denklemini düzgün tekil nokta civarında çözmeye çalışalım. Düzgün tekil noktayı $x_0 = 0$ olarak düşünelim, aksi durumda $x - x_0$ dönüşümü ile düzgün tekil noktayı orjine taşırız.

$x_0 = 0$, (5.1) denkleminin düzgün tekil noktası ise $x = 0$'da $x\frac{Q(x)}{P(x)} = xp(x)$ ve $x^2\frac{R(x)}{P(x)} = x^2 q(x)$ analitiktirler. Yani $\rho > 0$ olmak üzere $|x| < \rho$ aralığında yakınsak Taylor serisine

açılırlar;

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad , \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

(5.1) denklemini $P(x)$'e böler ve x^2 ile çarparsak

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0 \qquad (5.8)$$

veya

$$x^2 y'' + x(p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + \cdots)y' + (q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n + \cdots)y = 0 \quad (5.9)$$

denklemini elde ederiz. Eğer

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} \quad , \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

hariç bütün p_n ve q_n'ler sıfır ise (5.9) denklemi

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0$$

Euler denklemine indirgenir. Tabiki genelde $n \geq 1$ için p_n ve q_n'ler sıfır değildir. Bununla birlikte (5.9) denkleminin çözüm karakteri Euler denkleminin çözümü ile denktir. İşlemlerinizi $x>0$ aralığında yapacağız. $x<0$ için $x=-\xi$, $\xi>0$ alınarak benzer şekilde yapılır.

(5.9) denkleminin katsayıları "Euler katsayıları" kere kuvvet serileri olduğundan çözümü "Euler çözümü" kere kuvvet serisi şeklinde aralız. Buna göre $q_0 \neq 0$ olmak üzere

$$y = x^r (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (5.10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

alalım.

Örnek: $2x^2 y'' - x y' + (1+x) y = 0$ dif. denklemini çöz.

$x p(x) = x \cdot \frac{-x}{2x^2} = -\frac{1}{2}$, $x^2 q(x) = x^2 \frac{1+x}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$

$x=0$'da analitik olduğundan $x=0$ düzgün tekil noktadır.

$p_0 = -\frac{1}{2}$, $q_0 = \frac{1}{2}$, $q_1 = \frac{1}{2}$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

şeklinde çözümün var olduğunu kabul edelim.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}$$

değerlerini denklemde yerine yazarsak

$$2x^2y''-xy'+(1+x)y=\sum_{n=0}^{\infty}2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r+n)x^{r+n}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{r+n}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{r+n+1}}_{\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{r+n}}=0$$

$$a_0\left[2r(r-1)-r+1\right]x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1\right]a_n+a_{n-1}\right\}x^{r+n}=0$$

elde edilir. $a_0\neq 0$ olduğundan x^r katsayısı

$$2r(r-1)-r+1=(2r-1)(r-1)=0$$

dır. Buna verilen denklemin <u>indis denklemi</u> denir.
İndis denkleminin kökleri $r_1=1$ ve $r_2=\frac{1}{2}$ dir.

x^{r+n}'nin katsayısının sıfır olmasından da

$$\left[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1\right]a_n+a_{n-1}=0$$

veya

$$a_n=-\frac{a_{n-1}}{\left[(r+n)-1\right]\left[2(r+n)-1\right]},\quad n\geq 1$$

elde edilir. İndis denkleminin her bir r_1, r_2 kökü için a_n'leri indirgeme bağıntısından belirleriz. $r=r_1=1$ için

$$a_n=-\frac{a_{n-1}}{(2n+1)\,n},\quad n\geq 1$$

ve

$$a_1=-\frac{a_0}{3\cdot 1},\quad a_2=-\frac{a_1}{5\cdot 2}=\frac{a_0}{(3\cdot 5)(1\cdot 2)},\quad a_3=-\frac{a_2}{7\cdot 3}=\frac{-a_0}{(3\cdot 5\cdot 7)(1\cdot 2\cdot 3)}$$

ve genel terimi

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\left[3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)\right]n!}a_0,\quad n\geq 1$$

buluruz.

Buna göre verilen dif. denklemin bir çözümü

$$y_1(x) = x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{[3.5.7\cdots(2n+1)]\,n!}\right], \quad x>0$$

dir. Oran testinden bu serinin her x için yakınsak olduğunu görebiliriz. $r=r_2=\frac{1}{2}$ için

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \quad n\geq 1$$

ve

$$a_1 = -\frac{a_0}{1.1}, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2.3} = \frac{a_0}{(1.2)(1.3)}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{3.5} = -\frac{a_0}{(1.2.3)(1.3.5)}$$

ve genel terim

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!\,[1.3.5\cdots(2n-1)]}a_0, \quad n\geq 1$$

bulunur. Böylece ikinci çözüm

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!\,[1.3.5\cdots(2n-1)]}\right], \quad x>0$$

elde edilir. Bu seride her x için yakınsaktır. Çözümlerin ilk terimleri x ve $x^{1/2}$ olduklarından çözümler lineer bağımsızdır. Bu yüzden genel çözüm

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad x>0$$

dir.

İndis denkleminin köklerinin kompleks, katlı ve farklarının tamsayı olması durumunu bundan sonraki bölümde göreceğiz.

5.7 Düzgün Tekil Nokta Civarında Seri Çözümleri II

$$L(y) = x^2 y'' + x[x\,p(x)]\,y' + [x^2 q(x)]\,y = 0 \qquad (5\text{-}8)$$

dif. denkleminin çözümünü bulmak için genel problemi düşünelim. Burada $\rho > 0$ olmak üzere $|x| < \rho$ aralığında

$$x p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Serileri yakınsaktır. $x=0$ düzgün tekil nokta ve ilgili Euler denklemi

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0$$

dir. $x>0$ için (5.8) denkleminin çözümünü $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$y = \phi(r,x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

formunda arayalım.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}$$

denklemde yerine konur, düzenlenir ve $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$ denirse

$$\begin{aligned}
a_0 F(r) x^r &+ \left[a_1 F(r+1) + a_0(p_1 r + q_1)\right] x^{r+1} \\
&+ \left[a_2 F(r+2) + a_0(p_2 r + q_2) + a_1(p_1(r+1) + q_1)\right] x^{r+2} \\
&+ \cdots \\
&+ \left[a_n F(r+n) + a_0(p_n r + q_n) + \cdots + a_{n-1}(p_1(r+n-1) + q_1)\right] x^{r+n} \\
&+ \cdots = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha kapalı formda

$$L(\phi)(r,x) = a_0 F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[(r+k) p_{n-k} + q_{n-k} \right] \right\} x^{r+n} = 0 \quad (5.11)$$

yazarız. (5.11)'in sağlanması için x'in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır.

$a_0 \neq 0$ olduğundan $F(r)=0$ olmalıdır. Bu denkleme indis denklemi denir. Aslında bu ilgili Euler denkleminin $y = x^r$ olarak çözümünü aradığımız tam denklemdir.

x^{r+n}'nin katsayısını sıfır yaparak indirgeme bağıntısı

$$F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[(r+k) p_{n-k} + q_{n-k} \right] = 0, \quad n \geq 1 \quad (5.12)$$

elde ederiz.

Bu son denklemde görüldüğü gibi a_n'ler r'nin değerine bağlıdır.

İndis denkleminin kökleri reel ve $r_1 \geq r_2$ ise $F(r_1+n) \neq 0$, $n \geq 1$ olacağından (5.8)'in bir çözümü

$$y_1(x) = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right], \quad x > 0$$

dır. Burada $a_n(r_1)$, (5.12)'de $r = r_1$ alınarak bulunan a_n katsayılarıdır. Eğer r_2, r_1'e eşit değil ve $r_1 - r_2$ bir pozitif tamsayı değilse. $r_2 + n \neq r_1$ olacağından $n \geq 1$ için $F(r_2+n) \neq 0$ dır. Buna göre ikinci çözüm

$$y_2(x) = x^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right], \quad x > 0$$

dır. Burada $a_n(r_2)$, (5.12)'de $r = r_2$ alınarak belirlenen a_n katsayılarıdır. y_1 ve y_2 serilerinin yakınsaklık yarıçapı en azından $x=0$'dan ρ'nın en yakın sıfırına olan uzaklığına eşittir.

Eşit kökler: köklerin eşitliğinde Euler denkleminin ikinci çözümünü bulmada kullandığımız yönteme benzer olarak ikinci çözüm bulunur.

$$\left(\begin{array}{l} L(\phi)(r,x) = a_0 (r-r_1)^2 x^r \\ L\left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\right](r_1,x) = a_0 \left[(r-r_1)^2 x^r \ln x + 2(r-r_1) x^r \right] \Big|_{r=r_1} = 0 \end{array} \right)$$

ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1) x^n \, , \; x>0$$

dir. Burada $a_n'(r_1) = \frac{d a_n}{dr}\Big|_{r=r_1}$ dir.

kökler kompleks ise $f(r+n) \neq 0$ olacağından daima iki seri çözümü bulunur. Eğer kökler farkı pozitif tamsayı ise ikinci çözüm aşağıdaki teoremdeki gibidir.

Teorem: $x=0$'da düzgün tekil noktaya sahip

$$x^2 y'' + x[x p(x)] y' + [x^2 q(x)] y = 0$$

dif. denklemi verilsin. Bu durumda $x p(x)$ ve $x^2 q(x)$ serilerinin yakınsaklık yarıçaplarının minimumu $\rho > 0$ olmak üzere $|x| < \rho$ için

$$x p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \, , \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

kuvvet serileri yakınsaktır. (Yani $x=0$'da analitiktirler.)

r_1 ve r_2 reel ve $r_1 \geq r_2$ olmak üzere

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

indis denkleminin kökleri r_1, r_2 olsun. Bu durumda $-\rho < x < 0$ veya $0 < x < \rho$ aralığında $a_n(r_1)$, $a_0 = 1$ ve $r = r_1$ alınarak (S.12) indirgeme bağıntısıyla belirlenen katsayılar olmak üzere

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right]$$

formunda bir çözüm vardır.

Eğer $r_1 - r_2$ sıfır veya pozitif tamsayı değilse ikinci çözüm

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n\right]$$

formundadır. Burada $a_n(r_2)$, $a_0 = 1$ ve $r_1 = r_2$ alınarak

(S.12) indirgeme bağıntısı ile belirlenen katsayılardır. y_1 ve y_2 serileri en azından $|x| < \rho$ için yakınsaktır.

Eğer $r_1 = r_2$ ise ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n$$

formdadır.

Eğer $r_1 - r_2 = N$ pozitif tamsayı ise ikinci çözüm

$$y_2(x) = a\, y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2) x^n\right]$$

formundadır. Burada $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ ve a katsayıları y seri çözümü (S.8)'de yerine konarak bulunabilir. Son iki seride en azından $|x| < \rho$ aralığında yakınsaktır.

Örnek: $2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$ dif. denkleminin düzgün tekil noktalarını bulunuz ve bu noktalarda seri çözümleri için yorum yapınız.

$$P(x) = 2x(1+x), \quad Q(x) = 3+x, \quad R(x) = -x$$

$x=0$ ve $x=-1$ tekil noktalardır.

$$\lim_{x\to 0} x p(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{-x}{2x(1+x)} = 0$$

olduğundan $x=0$ düzgün tekil noktadır. $p_0 = \frac{3}{2}$, $q_0 = 0$ ve indis denklemi $F(r) = r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0$ ve kökleri $r_1 = 0$, $r_2 = \frac{-1}{2}$ dir. Buna göre seri çözümleri

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n \quad \text{ve} \quad y_2(x) = |x|^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-\tfrac{1}{2})x^n\right]$$

dir. $x=0$'dan $P(x)$'in sıfırına olan uzaklığı 1 olduğundan bu seriler en azından $|x|<1$ için yakınsaktır.

$$\lim_{x\to -1} (x+1)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -1} (x+1)\frac{3+x}{2x(1+x)} = -1$$

$$\lim_{x\to -1} (x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -1} (x+1)^2\frac{-x}{2x(1+x)} = 0$$

olduğundan $x=-1$ düzgün tekil noktadır. $p_0 = -1$, $q_0 = 0$ ve indis denklemi $F(r) = r(r-1) - r = 0$ ve kökleri $r_1 = 2$, $r_2 = 0$ dır. Buna göre

$$y_1(x) = (x+1)^2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n\right)$$

ve

$$y_2(x) = a\, y_1(x) \ln|x+1| + \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)(x+1)^n\right]$$

dir. Bu seriler en ~~az~~ azından $|x+1| < 1$ için yakınsaktır.